

# Estabilização Exponencial e Implementação Computacional de Ondas Acopladas

RAMOS, A. J. A, ATAÍDE, W. L., JESUS, S. S, COSTA, D. C.

Universidade Federal do Pará, Campus Salinópolis / Faculdade de Matemática, Salinópolis.

ramos@ufpa.br, werllen.l@hotmail.com, samuelsarmento43@gmail.com, diellecosta1@gmail.com.

**Resumo** — Neste trabalho estudamos o problema de vibração de ondas acopladas com condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas. Os principais resultados apresentados são o decaimento exponencial do problema dissipativo, obtido usando o método da energia, a discretização do modelo através do método de diferenças finitas e a implementação computacional usando o Matlab.

**Palavras-chave:** Sistemas de ondas acopladas, decaimento exponencial, discretização em diferenças finitas.

## I. INTRODUÇÃO

Consideramos o problema de vibração de ondas acopladas modelado pelo sistema de equações

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) + \gamma u_t = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (1)$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \alpha(v - u) + \gamma v_t = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (2)$$

onde  $\alpha$  e  $\gamma$  são constantes positivas. As condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas são dadas por

$$u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = 0, \forall t \geq 0, \quad (3)$$

seguido das condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (4)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x). \quad (5)$$

As questões referentes a existência e unicidade de solução do sistema (1)-(5) estão bem estabelecidas na literatura [2], e não serão objeto de nosso estudo.

Em 2015, Almeida Júnior, Ramos e Santos [1], provaram que para  $\gamma = 0$ , o sistema (1)-(5) é exatamente observável no espaço de energia, mas por outro lado, quando o problema é semidiscretizado, ele sofre uma perda de observabilidade numérica causada pela interação entre o último autovalor  $\lambda_j$  e o parâmetro de malha  $h$  do problema espectral associado.

Nos últimos anos, questões referentes a estabilização de sistemas hiperbólicos dissipativos têm ganhado muito repercussão na literatura especializada, como exemplo,

podemos citar os recentes trabalhos de Ramos e Souza [3] e de Santos e Almeida Júnior [4].

Nossa singela contribuição neste estudo está na prova do decaimento exponencial da energia e na implementação computacional, onde além de exibirmos as soluções numéricas dos casos conservativo e dissipativo também mostramos o comportamento monótono não crescente da energia discreta.

## II. ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL

A seguir, apresentamos a energia total e o resultado de estabilização exponencial do sistema de equações acopladas.

### A. Energia Total do Sistema

A energia total associada ao sistema (1)-(5) é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^L |u - v|^2 dx \quad (6)$$

e satisfaz a seguinte lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma \int_0^L |u_t|^2 dx - \gamma \int_0^L |v_t|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (7)$$

É fácil notar, que para o caso  $\gamma = 0$ , o problema se torna conservativo. Por outro lado, para o caso  $\gamma > 0$ , obtemos um sistema dissipativo que provamos ser exponencial estável. O teorema seguinte trata desse resultado.

**Teorema 1.** A energia total associada ao sistema (1)-(5) decai exponencialmente para zero com  $t \rightarrow \infty$ , isto é, existem constantes positivas  $M > 0$  e  $\omega > 0$  tais que

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

### III. DISCRETIZAÇÃO TOTAL

Consideramos o seguinte esquema numérico associado ao sistema de equações (1)-(5)

$$\partial_t \bar{\partial}_t u_j^n - \partial_x \bar{\partial}_x u_j^n + \alpha(u_j^n - v_j^n) + \gamma \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u_j^n = 0, \quad (9)$$

$$\partial_t \bar{\partial}_t v_j^n - \partial_x \bar{\partial}_x v_j^n + \alpha(v_j^n - u_j^n) + \gamma \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} v_j^n = 0, \quad (10)$$

onde  $\partial_t u_j^n := (u_j^{n+1} - u_j^n)/\Delta t$  e  $\bar{\partial}_t u_j^n := (u_j^n - u_j^{n-1})/\Delta t$  com expressões análogas para a discretização espacial.

As condições de contorno são dadas por

$$u_0^n = u_J^n = v_0^n = v_J^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N+1 \quad (11)$$

e as condições iniciais por

$$u_j^0 = f_j^{(1)}, \quad \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u_j^0 = f_j^{(2)}, \quad j = 0, 1, \dots, J+1. \quad (12)$$

$$v_j^0 = g_j^{(1)}, \quad \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} v_j^0 = g_j^{(2)}, \quad j = 0, 1, \dots, J+1. \quad (13)$$

A energia discreta associada ao esquema numérico (9)-(13) é dada por

$$\begin{aligned} E^n := & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \right)^2 \\ & + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left( \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) \\ & + \alpha \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - v_j^{n+1})(u_j^n - v_j^n) \end{aligned} \quad (14)$$

e satisfaz a seguinte lei de dissipação

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = -\gamma \Delta x \sum_{j=0}^J \left| \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u_j^n \right|^2 - \gamma \Delta x \sum_{j=0}^J \left| \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} v_j^n \right|^2 \quad (15)$$

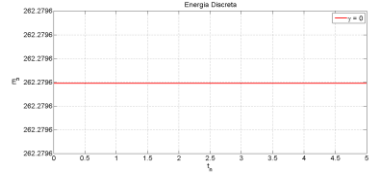
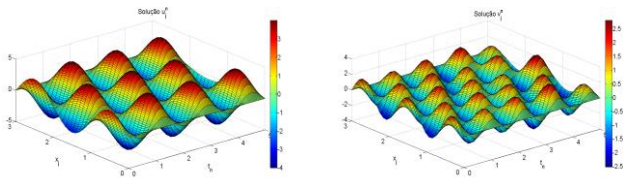
para todo  $n = 1, \dots, N$ .

### IV. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Para as simulações numéricas, usamos o software Matlab adotando  $L = 3$ ,  $J = 32$ ,  $N = 240$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\gamma \in \{0, 1.2\}$ .

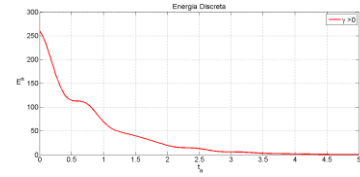
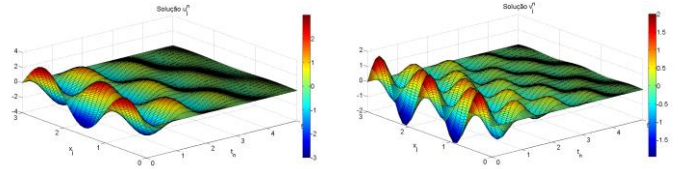
#### A. Caso Conservativo

Neste caso, consideramos  $\gamma = 0$  e plotamos os gráficos da solução numérica e da energia discreta respectivamente.



#### B. Caso Dissipativo

Aqui consideramos  $\gamma > 0$  e plotamos os gráficos da solução numérica e da energia discreta respectivamente.



### V. CONCLUSÕES

No presente trabalho, concluímos que o sistema de ondas acopladas é exponencialmente estável, e além disso, que o esquema numérico explícito em diferenças finitas é robusto o suficiente para reproduzir os resultados de conservação e dissipação da energia total.

### REFERÊNCIAS

- [1] ALMEIDA JÚNIOR, D. S., RAMOS, A. J. A., SANTOS, M. L. Observability inequality for the finite-difference semi-discretization of the 1-d coupled wave equations. *Adv Comput Math.*, v. 41, p. 105-130, 2015.
- [2] NAJAFI, M. The study of stabilizability of the coupled wave equations under various end condition. In: *The 3 IEEE Conference on Decision and Control* (1992).
- [3] RAMOS, A. J. A., SOUZA, M. W. P. Equivalence between observability at the boundary and stabilization for transmission problem of the wave equation. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 68, p. 48-58, 2017.
- [4] SANTOS, M. L., ALMEIDA JÚNIOR, D. S. On the porous-elastic system with Kelvin-Voigt damping. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 445, p. 498-512, 2017.